Exercice 1 (TD)

1- Représentation

2- Droite de regression de Y en fct° de X

	X	Y	X^2	XY
1	6957	469	48.399.849	3.262.833
2	845	35	714.025	29575
3	4523	333	20457529	1.506.159
4	3817	255	14.569.489	973.335
5	2085	114	4.347.225	237.690
6	1124	82	1.263.376	92.168
Total	19351	1288	89.751.493	6.101.760

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} XY - \bar{X}\bar{Y}$$

$y = ax + b$ avec $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}$

$b = \bar{y} - a\bar{x}$

$\overline{X} = \frac{19351}{6} = 3225,17$; $\overline{Y} = \frac{1288}{6} = 214,67$

$Cov(x,y) = \frac{1}{6}(6.101.760) - (3225,17)(214,67)$

$= 1016.960 - 692347,24$

$Cov(x,y) = 324612,76$

$V(x) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} x^2 - (\overline{x})^2$

$= \frac{1}{6}(89.751.493) - (3225,17)^2$

$V(x) = 4.556.860,64$

Donc $a = \frac{324.612,76}{4556860,64}$

$a = 0,07124$

$b = (214,67) - (0,07124)(3225,17)$

$b = -15,078$

D'où $\boxed{y = 0,07124x - 15,078}$

CS CamScanner

$SCR = \sum (\hat{y} - y)^2$

$SCE = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2$

$SCT = SCR + SCE$

y	$\hat{y}$	$\hat{y} - y$	$(\hat{y} - y)^2$	$\hat{y} - \bar{y}$	$(\hat{y} - \bar{y})^2$
469	480,53	11,53	132,9409	265,86	70681,5396
35	45,12	10,12	102,4144	-169,55	28747,2025
333	307,14	-25,86	668,7396	92,47	8550,7009
255	256,84	1,84	3,3856	42,17	1778,3089
114	133,46	19,46	378,6916	-81,21	6596,0641
82	65	-17	289	-149,67	22401,1089
Total			1575,1721		138753,9249

SCR = 1575,1721

SCE = 138753,9249

SCT = 140329,097

y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$
469	254,33	64683,7489
35	-179,67	32281,3089
333	118,33	14001,9889
255	40,33	1626,5089
114	-100,67	10134,4489
82	-132,67	17601,3289
Total		140329,3334

9. $\boxed{SCT = \sum (y-\bar{y})^2 = 140329,33}$

On doit utiliser cette formule pour calculer le SCT.

Mais la formule SCT = SCR + SCE est juste une conséquence pour vérifier les calculs.

4-a) Coefficient de corrélation r :

$$r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{V(x) \cdot V(y)}} \quad \text{où } V(y) = \frac{SCT}{6}$$

$$V(y) = \frac{140329,33}{6} = 23388,22$$

$$r = \frac{324612,76}{\sqrt{(4556860,64)(23388,22)}}$$

$$\boxed{r = 0,99}$$

b) Coefficient de détermination R^2

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{138753,9249}{140329,33}$$

$$\boxed{R^2 = 0,989}$$

CamScanner

5- Rappelons les principes des tests

a) Test de Student sur la pente a de la droite de régression

Il se résume en 03 étapes

1- Formulation des hypothèses à tester

i) H_0 : " $a=0$ "

ii) H_1 : " $a \neq 0$ "

2- Détermination du degré de liberté

$$DL = n-2$$

3- Considérant la statistique

$$T = \frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}(\hat{a})},$$

où : $\hat{a}$ est la valeur calculée de a (estimation)

$$\hat{\sigma}(\hat{a}) = \frac{SCR}{(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)}$$

et $SCR = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$

CamScanner

On a les possibilités suivantes :

→ Si $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}$, l'hypothèse H_0 est rejetée en faveur de H_1

→ Si $|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}$, l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée

b) Test de Fisher sur la pente a de la droite de régression

1- Formulation des hypothèses à tester

i) H_0 "$a = 0$"

ii) H_1 "$a \neq 0$"

2) Détermination du degré de liberté :

$$DL = (1 ; n-2)$$

3- Considérant la statistique

$$F = (n-2)\frac{R^2}{1-R^2} = \frac{SCE/1}{SCR/n-2}$$

On rejette H_0 au seuil de signification α si $F > F_{(\alpha;1,n-2)}$ F étant calculé et $F_{(\alpha;1,n-2)}$ la valeur théorique lue dans la table de Fisher.

6- Effectuons les tests (avec $\alpha = 0,05$)

a) Test de Student

1 - Hypothèse

H_0: "$a=0$" ; H_1: "$a \neq 0$"

2 - Dégré de liberté : $DL = 6-2 = 4$

3 - La statistique Test : $T = \dfrac{\hat{a}}{\hat{\sigma}(\hat{a})}$

Or $\hat{\sigma}(\hat{a}) = \dfrac{SCR}{(6-2)\left(\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2\right)} = \dfrac{SCR}{4\,(6 \times V(X))}$

$= \dfrac{1575,1721}{4\,(6 \times 455\,6860,64)}$

$\hat{\sigma}(\hat{a}) = 1,44 \times 10^{-5}$

D'où $T = \frac{0,07124}{1,44 \times 10^{-5}}$

$T = 4947,22$

D'après la table de student, pour un dégré de liberté $= 4$ et $\alpha = 0,05$,

$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,776$

Comme $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}$, l'Hypothèse H_0 est rejetée et donc $\underline{\underline{a \neq 0}}$.

b) <u>Test de Fisher</u>

1- Hypothèses : H_0 : "$a = 0$" ; H_1 : "$a \neq 0$"

2- Dégré de liberté : $DL = (1,4)$

3- La statistique F est : $F = (n-2)\frac{R^2}{1-R^2}$

$F = (6-2)\frac{0,989}{1-0,989}$ $\quad \underline{\underline{F = 359,64}}$

D'après la table de Fisher, pour un degré de liberté de $(1,4)$ et $\alpha = 0{,}05$, On a $F_{(\alpha;1,4)} = 225$.

Comme $F > F_{(\alpha;1,4)}$, l'Hypothèse H_0 est rejetée et donc $\underline{\underline{a \neq 0}}$.

Exercice 4 (TD)

1- formules du LED

$$\begin{cases} \hat{x}_t = \lambda x_{t-1} + (1-\lambda)\hat{x}_{t-1} \\ \hat{\hat{x}}_t = \lambda \hat{x}_t + (1-\lambda)\hat{\hat{x}}_{t-1} \\ a_t = 2\hat{x}_t - \hat{\hat{x}}_t \\ b_t = \frac{1}{\bar{\lambda}}(\hat{x}_t - \hat{\hat{x}}_t) \qquad \bar{\lambda} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \\ x^p_{t-1,t} = a_t + b_t \quad (t = 2, \dots, n+1) \\ x^p_{n,n+h} = a_{n+1} + b_{n+1} \times h \quad (h = 2, 3 \dots) \end{cases}$$

Où $(x)_t$ est une chronique et $(\hat{x})_t$ les valeurs estimées de $(x)_t$ par un LES avec $\forall t$, $x^p_{t-1,t}$ est la valeur prévue pour x_t en $t-1$ par le LED.

Mois	x_t	$\hat{x}_t$	$\hat{\hat{x}}_t$	a_t	b_t
J 1	54,23	54,23	54,23		
F 2	51,51	54,23	54,23		
M 3	55,60	53,414	53,985		
A 4	55,72	54,0698	54,01		
M 5	58,71	54,565	54,176		
J 6	58,82	55,808	54,666		
J 7	55,41	56,712	55,28		
A 8	64,92	56,321	55,592		
9		58,9	56,584		
10					
11					
12					

On suppose $\hat{x}_1 = \hat{\hat{x}}_1 = x_1 = 54,23$ $\boxed{\lambda = 0,3}$

$$\hat{x}_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)\hat{x}_1$$
$$= \lambda x_1 + (1-\lambda) x_1$$
$$\hat{x}_2 = x_1 = 54,23$$
$$\hat{x}_3 = 0,3\,(51,51) + (1-0,3)(54,23) = 53,414$$

$\hat{x}_4 = 0,3(55,60) + (1-0,3)(53,414) = 54,0695$

$\hat{x}_5 = 0,3(55,72) + (1-0,3)(54,0695) = 54,565$

$\hat{x}_6 = 0,3(58,72) + (1-0,3)(54,565) = 55,808$

$\hat{x}_7 = 0,3(58,82) + (1-0,3)(55,808) = 56,712$

$\hat{x}_8 = 0,3(55,41) + (1-0,3)(56,712) = 56,321$

$\hat{x}_9 = 0,3(64,92) + (1-0,3)(56,321) = 58,9$

$\hat{\hat{x}}_2 = \lambda \hat{x}_2 + (1-\lambda)\hat{\hat{x}}_1$

$= \lambda x_1 + (1-\lambda) x_1$

$\hat{\hat{x}}_2 = x_1 = 54,23$

$\hat{\hat{x}}_3 = 0,3(53,414) + (1-0,3)(54,23) = 53,985$

$\hat{\hat{x}}_4 = 0,3(54,0698) + (1-0,3)(53,985) = 54,01$

$\hat{\hat{x}}_5 = 0,3(54,565) + (1-0,3)(54,01) = 54,176$

$\hat{\hat{x}}_6 = 0,3(55,808) + (1-0,3)(54,176) = 54,666$

$\hat{\hat{x}}_7 = 0,3(56,712) + (1-0,3)(54,666) = 55,28$

$\hat{\hat{x}}_8 = 0,3(56,321) + (1-0,3)(55,28) = 55,592$

$\hat{\hat{x}}_9 = 0,3(58,9) + (1-0,3)(55,592) = 56,584$

$a_g = 2\hat{x}_g - \hat{\hat{x}}_g = 2(58,9) - (56,584)$

$a_g = 61,216$

$b_g = \frac{1}{\lambda}(\hat{x}_g - \hat{\hat{x}}_g)$ Or $\lambda = \frac{1-0,3}{0,3} = \frac{7}{3}$

$b_g = \frac{3}{7}(58,9 - 56,584)$

$b_g = 0,993$

Donc $x^P_{8,9} = a_g + b_g = 62,209$

$x^P_{9,10} = a_g + 2b_g = 61,216 + 2(0,993)$

$x^P_{9,10} = 63,202$

Mois	x_t	$\hat{x}_t$	$\hat{\hat{x}}_t$	a_t	b_t	$x^p_{t-1;t}$
J 1	54,23	54,23	54,23			
F 2	51,51	54,23	54,23			
M 3	55,60	53,414	53,985			
A 4	55,72	54,0698	54,01			
M 5	58,71	54,565	54,176			
J 6	58,82	55,808	54,666			
J 7	55,41	56,712	55,28			
A 8	64,92	56,321	55,592			
9		58,9	56,584	61,216	0,993	62,209
10						63,202
11						64,195
12						65,188

$$x^p_{10,11} = a_9 + 3b_9 = 64,195$$

$$x^p_{11,12} = a_9 + 4b_9 = 65,188$$

4- Intervalles de confiance

$$\sigma_t^2 = \frac{\sum_{t=1}^{8}(x_t - \bar{x}_t)^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{8} x_t^2 - (\bar{x}_t)^2\right)$$

t	x_t	x_t^2
1	54,23	2940,8929
2	51,51	2653,2801
3	55,6	3091,36
4	55,72	3104,7184
5	58,71	3446,8641
6	58,82	3459,7924
7	55,41	3070,2681
8	64,92	4214,6064
Total	454,92	25981,18

$$\bar{x} = \frac{454,92}{8} = 56,865$$

$$\sigma_x^2 = \frac{8}{7}\left(\frac{1}{8} \cdot 25981,18 - (56,865)^2\right)$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = 16,022}$$

$$C_h^2 = 1 + \frac{1-\lambda}{(1+\lambda)^3}\left[(1+4\lambda+5\lambda^2) + 2h(1-\lambda)(1+3\lambda) + 2h^2(1-\lambda)^2\right]$$

$$C_2^2 = 1 + \frac{0,3}{(1,7)^3} \left[1 + 4(0,7) + 5(0,7) \ldots \right.$$
$$2 \times 2 (0,3)(1 + 3(0,7))$$
$$\left. + 2 \times (2)^2 (0,3)^2 \right]$$

$$C_2^2 = 1 + \frac{0,3}{(1,7)^3} \left[6,25 + 3,72 + 0,72 \right]$$

$$= 1 + \frac{0,3}{(1,7)^3} (10,69)$$

$$C_2^2 = 1,653$$

$$\sqrt{C_2^2 \sigma_x^2} = C_2 \sigma_x = \sqrt{1,653 \times 16,022}$$

$$C_2 \sigma_x = 5,146$$

Donc $IC_1 = 62,209 \pm 1,96 \times 5,1\ldots$

$$IC_1 = 62,209 \pm 10,09$$